481 Let a , b , and c be number variables. Using concurrency, write a program to sort the values of these variables so that $a' \le b' \le c'$, and $(a'; b'; c')$ is a permutation of $(a; b; c)$.

After trying the question, scroll down to the solution.

§ The formal specification is

$a'{\le}b'{\le}c' \;\wedge\; perm$

where *perm* is defined as

$perm \;=\; a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c \;\vee\; a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b \;\vee\; a'{=}b \wedge b'{=}a \wedge c'{=}c$
$\vee\; a'{=}b \wedge b'{=}c \wedge c'{=}a \;\vee\; a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b \;\vee\; a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$

Here's one way to refine it.

$a'{\le}b'{\le}c' \;\wedge\; perm$

$\Leftarrow$ **if** $a{\le}b$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a$ **fi**.
if $a{\le}c$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, c \parallel c{:=}\, a$ **fi**.
if $b{\le}c$ **then** *ok* **else** $b{:=}\, c \parallel c{:=}\, b$ **fi**

Proof: starting with the right side,

if $a{\le}b$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a$ **fi**.
if $a{\le}c$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, c \parallel c{:=}\, a$ **fi**.
if $b{\le}c$ **then** *ok* **else** $b{:=}\, c \parallel c{:=}\, b$ **fi** In this line, expand *ok* and $b{:=}\, c \parallel c{:=}\, b$

$=$ **if** $a{\le}b$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a$ **fi**.
if $a{\le}c$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, c \parallel c{:=}\, a$ **fi**.
if $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$ **else** $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
distribute last line into middle line

$=$ **if** $a{\le}b$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a$ **fi**.
if $a{\le}c$ **then** *ok*. **if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$ **else** $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
else $(a{:=}\, c \parallel c{:=}\, a)$. **if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$ **else** $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi fi**
ok is identity, and substitution law

$=$ **if** $a{\le}b$ **then** *ok* **else** $a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a$ **fi**.
if $a{\le}c$ **then if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$ **else** $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
else if $b{\le}a$ **then** $a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$ **else** $a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$ **fi fi**
distribute last two lines into first line

$=$ **if** $a{\le}b$ **then** *ok*. **if** $a{\le}c$ **then if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$
else $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
else if $b{\le}a$ **then** $a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$
else $a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$ **fi fi**
else $(a{:=}\, b \parallel b{:=}\, a)$. **if** $a{\le}c$ **then if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$
else $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
else if $b{\le}a$ **then** $a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$
else $a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$ **fi fi fi**
ok is identity, and substitution law

$=$ **if** $a{\le}b$ **then if** $a{\le}c$ **then if** $b{\le}c$ **then** $a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$
else $a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$ **fi**
else if $b{\le}a$ **then** $a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$
else $a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$ **fi fi**
else if $b{\le}c$ **then if** $a{\le}c$ **then** $a'{=}b \wedge b'{=}a \wedge c'{=}c$
else $a'{=}b \wedge b'{=}c \wedge c'{=}a$ **fi**
else if $a{\le}b$ **then** $a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$
else $a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$ **fi fi fi**

$=$ $a{\le}b \wedge a{\le}c \wedge b{\le}c \wedge a'{=}a \wedge b'{=}b \wedge c'{=}c$
$\vee\;\; a{\le}b \wedge a{\le}c \wedge c{<}b \wedge a'{=}a \wedge b'{=}c \wedge c'{=}b$
$\vee\;\; a{\le}b \wedge c{<}a \wedge b{\le}a \wedge a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$
$\vee\;\; a{\le}b \wedge c{<}a \wedge a{<}b \wedge a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$
$\vee\;\; b{<}a \wedge b{\le}c \wedge a{\le}c \wedge a'{=}b \wedge b'{=}a \wedge c'{=}c$
$\vee\;\; b{<}a \wedge b{\le}c \wedge c{<}a \wedge a'{=}b \wedge b'{=}c \wedge c'{=}a$
$\vee\;\; b{<}a \wedge c{<}b \wedge a{\le}b \wedge a'{=}c \wedge b'{=}a \wedge c'{=}b$
$\vee\;\; b{<}a \wedge c{<}b \wedge b{<}a \wedge a'{=}c \wedge b'{=}b \wedge c'{=}a$

$$
\begin{array}{ll}
\Longrightarrow & \quad a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
= & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm
\end{array}
$$

Here's another way to refine it.

$$
\begin{array}{ll}
 & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\Longleftarrow & \textbf{if } a\le b \textbf{ then if } b\le c \textbf{ then } ok \\
 & \qquad\qquad \textbf{else if } a\le c \textbf{ then } b := c \parallel c := b \\
 & \qquad\qquad\qquad \textbf{else } a := c \parallel b := a \parallel c := b \textbf{ fi fi} \\
 & \textbf{else if } b\le c \textbf{ then if } a\le c \textbf{ then } a := b \parallel b := a \\
 & \qquad\qquad\qquad \textbf{else } a := b \parallel b := c \parallel c := a \textbf{ fi} \\
 & \quad \textbf{else } a := c \parallel c := a \textbf{ fi fi}
\end{array}
$$

Proof, stating with the right side:

$$
\begin{array}{ll}
 & \textbf{if } a\le b \textbf{ then if } b\le c \textbf{ then } ok \\
 & \qquad\qquad \textbf{else if } a\le c \textbf{ then } b := c \parallel c := b \\
 & \qquad\qquad\qquad \textbf{else } a := c \parallel b := a \parallel c := b \textbf{ fi fi} \\
 & \textbf{else if } b\le c \textbf{ then if } a\le c \textbf{ then } a := b \parallel b := a \\
 & \qquad\qquad\qquad \textbf{else } a := b \parallel b := c \parallel c := a \textbf{ fi} \\
 & \quad \textbf{else } a := c \parallel c := a \textbf{ fi fi} \\
= & \quad a\le b \wedge b\le c \wedge a'=a \wedge b'=b \wedge c'=c \\
\vee & a\le b \wedge c<b \wedge a\le c \wedge a'=a \wedge b'=c \wedge c'=b \\
\vee & a\le b \wedge c<b \wedge c<a \wedge a'=c \wedge b'=a \wedge c'=b \\
\vee & b<a \wedge b\le c \wedge a\le c \wedge a'=b \wedge b'=a \wedge c'=c \\
\vee & b<a \wedge b<c \wedge c<a \wedge a'=b \wedge b'=c \wedge c'=a \\
\vee & b<a \wedge c\le b \wedge a'=c \wedge b'=b \wedge c'=a \\
\Longrightarrow & \quad a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
\vee & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm \\
= & a'\le b'\le c' \ \wedge\ perm
\end{array}
$$