407 Let all variables be integer. Add recursive time. Using recursive construction, find a fixed-point of

(a) $skip \;=\; \textbf{if } i\ge 0 \textbf{ then } i{:=}\ i-1.\ skip.\ i{:=}\ i+1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$

(b) $inc \;=\; ok \lor (i{:=}\ i+1.\ inc)$

(c) $sqr \;=\; \textbf{if } i=0 \textbf{ then } ok \textbf{ else } s{:=}\ s + 2\times i - 1.\ i{:=}\ i-1.\ sqr \textbf{ fi}$

(d) $fac \;=\; \textbf{if } i=0 \textbf{ then } f{:=}\ 1 \textbf{ else } i{:=}\ i-1.\ fac.\ i{:=}\ i+1.\ f{:=}\ f\times i \textbf{ fi}$

(e) $chs \;=\; \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1 \textbf{ else } a{:=}\ a-1.\ chs.\ a{:=}\ a+1.\ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi}$

(f) $foo \;=\; \textbf{if } i=0 \textbf{ then } i{:=}\ 3 \textbf{ else } foo \textbf{ fi}$

(g) $bar \;=\; i{:=}\ i-1.\ \textbf{if } i=0 \textbf{ then } i{:=}\ 3 \textbf{ else } bar.\ i{:=}\ 3 \textbf{ fi}$

After trying the question, scroll down to the solution.

(a) $skip = \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ skip.\ i{:=}\ i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$

§ Adding recursive time,

$$skip = \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ skip.\ i{:=}\ i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$$
$$skip_0 = t' \ge t$$
$$skip_{n+1} = \textbf{if } i{\ge}n \textbf{ then } t' \ge t{+}n{+}1 \textbf{ else if } 0{\le}i{<}n \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi fi}$$
$$skip_\infty = \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$$

To show it's a fixed-point, start with the right side of the definition of $skip$, but substitute $skip_\infty$ in place of $skip$,

$\textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}.\ i{:=}\ i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$

distribute $i{:=}\ i{+}1$ into preceding **if**

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1.\ i{:=}\ i{+}1 \textbf{ else } ok.\ i{:=}\ i{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

replace first $i{:=}\ i{+}1$ and $ok$ is identity for .

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } t{:=}t{+}i{+}1.\ i'{=}i{+}1 \land t'{=}t \textbf{ else } i{:=}\ i{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

substitution law in second **then**-part

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i'{=}i{+}1 \land t'{=}t{+}i{+}1 \textbf{ else } i{:=}\ i{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

replace $i{:=}\ i{+}1$

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i{:=}i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } i'{=}i{+}1 \land t'{=}t{+}i{+}1 \textbf{ else } i'{=}i{+}1 \land t'{=}t \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

substitution law twice more

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then if } i{-}1{\ge}0 \textbf{ then } i'{=}i{-}1{+}1 \land t'{=}t{+}1{+}i{-}1{+}1 \textbf{ else } i'{=}i{-}1{+}1 \land t'{=}t{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

simplify

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then if } i{\ge}1 \textbf{ then } i'{=}i \land t'{=}t{+}i{+}1 \textbf{ else } i'{=}i \land t'{=}t{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$ use := twice

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then if } i{\ge}1 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } t{:=}\ t{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$

In the first **else**-part the context is $i{\ge}0 \land \neg(i{\ge}1)$ which is $i{=}0$

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then if } i{\ge}1 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ fi else } ok \textbf{ fi}$ case idempotent

$= \textbf{if } i{\ge}0 \textbf{ then } t{:=}\ t{+}i{+}1 \textbf{ else } ok \textbf{ fi}$

and we get $skip_\infty$ again, so it is a fixed-point.

(b) $inc = ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ inc)$

§ Adding recursive time,

$$inc = ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc)$$

Now recursive construction. Starting with $\top$ ,

$$inc_0 = \top$$
$$inc_1 = ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_0)$$
$$= ok \lor \top$$
$$= \top$$

We have converged, and found that $\top$ is a fixed-point. Perhaps we'll get something more interesting if we start with $t'{\ge}t$ .

$$inc_0 = t'{\ge}t$$
$$inc_1 = ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_0)$$
$$= i'{=}i \land t'{=}t \lor t'{\ge}t{+}1$$
$$inc_2 = ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_1)$$
$$= i'{=}i \land t'{=}t \lor i'{=}i{+}1 \land t'{=}t{+}1 \lor t'{\ge}t{+}2$$

I'm ready to guess

$$inc_n = (\exists m{:}\ 0,..n\cdot\ i'{=}i{+}m \land t'{=}t{+}m) \lor t'{\ge}t{+}n$$
$$inc_\infty = (\exists m{:}\ nat\cdot\ i'{=}i{+}m \land t'{=}t{+}m) \lor t'{=}\infty$$

Now I must test $inc_\infty$ to see if it's a fixed-point.

$ok \lor (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_\infty)$

$= i'{=}i \land t'{=}t \lor (\exists m{:}\ nat\cdot\ i'{=}i{+}1{+}m \land t'{=}t{+}1{+}m) \lor t'{=}\infty$ arithmetic identity

$= i'{=}i{+}0 \land t'{=}t{+}0 \lor (\exists m{:}\ nat\cdot\ i'{=}i{+}1{+}m \land t'{=}t{+}1{+}m) \lor t'{=}\infty$ change of variable

$= i'{=}i{+}0 \land t'{=}t{+}0 \lor (\exists m{:}\ nat{+}1\cdot\ i'{=}i{+}m \land t'{=}t{+}m) \lor t'{=}\infty$ basic quantifier law

$= (\exists m{:}\ 0\cdot\ i'{=}i{+}m \land t'{=}t{+}m) \lor (\exists m{:}\ nat{+}1\cdot\ i'{=}i{+}m \land t'{=}t{+}m) \lor t'{=}\infty$

basic quantifier law

$=\ (\exists m\colon 0, nat{+}1\cdot\ i'{=}i{+}m \wedge t'{=}t{+}m)\ \vee\ t'{=}\infty$ fixed-point *nat* construction

$=\ (\exists m\colon nat\cdot\ i'{=}i{+}m \wedge t'{=}t{+}m)\ \vee\ t'{=}\infty$

$=\ inc_\infty$

Starting with $\bot$ we get

$inc_0\ =\ \bot$

$inc_1\ =\ ok \vee (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_0)$

$\quad =\ i'{=}i \wedge t'{=}t$

$inc_2\ =\ ok \vee (i{:=}\ i{+}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ inc_1)$

$\quad =\ i'{=}i \wedge t'{=}t\ \vee\ i'{=}i{+}1 \wedge t'{=}t{+}1$

$inc_n\ =\ (\exists m\colon 0,..n\cdot\ i'{=}i{+}m \wedge t'{=}t{+}m)$

$inc_\infty\ =\ (\exists m\colon nat\cdot\ i'{=}i{+}m \wedge t'{=}t{+}m)$

This is a fixed-point (not proven here), and it's implementable too (also not proven here)!

(c) $sqr\ =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ sqr\ \textbf{fi}$

§ $sqr_0\ =\ t'{\ge}t$

$sqr_1\ =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ sqr_0\ \textbf{fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ t' \ge t{+}1$

$sqr_2\ =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ sqr_1\ \textbf{fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ \ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad\qquad \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ t' \ge t{+}1\ \textbf{fi fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok$
$\qquad \textbf{else if}\ i{-}1{=}0\ \textbf{then}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1$
$\qquad\quad \textbf{else}\ t' \ge t{+}2\ \textbf{fi fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}0.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}0$
$\qquad \textbf{else if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}1.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}1$
$\qquad\quad \textbf{else}\ t' \ge t{+}2\ \textbf{fi fi}$

$sqr_3\ =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok$
$\qquad \textbf{else}\ \ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad\qquad \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}0.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}0$
$\qquad\qquad \textbf{else if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}1.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}1$
$\qquad\qquad\quad \textbf{else}\ t' \ge t{+}2\ \textbf{fi fi fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok$
$\qquad \textbf{else if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ \ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad\qquad s{:=}\ s{+}0.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}0$
$\qquad\quad \textbf{else if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad\qquad s{:=}\ s{+}1.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}1$
$\qquad\qquad \textbf{else}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ t' \ge t{+}2\ \textbf{fi fi fi}$

$\quad =\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}0.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}0$
$\qquad \textbf{else if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}1.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}1$
$\qquad\quad \textbf{else if}\ i{=}2\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}4.\ i{:=}\ 0.\ t{:=}\ t{+}2$
$\qquad\qquad \textbf{else}\ t' \ge t{+}3\ \textbf{fi fi fi}$

$sqr_n\ =\ \textbf{if}\ 0{\le}i{<}n\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}i^2.\ t{:=}\ t{+}i.\ i{:=}\ 0\ \textbf{else}\ t' \ge t{+}n\ \textbf{fi}$

$sqr_\infty\ =\ \textbf{if}\ 0{\le}i\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}i^2.\ t{:=}\ t{+}i.\ i{:=}\ 0\ \textbf{else}\ t'{=}\infty\ \textbf{fi}$

Now we test to see if $sqr_\infty$ is a fixed-point.

$\textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok\ \textbf{else}\ \ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad \textbf{if}\ 0{\le}i\ \textbf{then}\ s{:=}\ s{+}i^2.\ t{:=}\ t{+}i.\ i{:=}\ 0\ \textbf{else}\ t'{=}\infty\ \textbf{fi fi}$

$=\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok$
$\quad \textbf{else if}\ 0{\le}i{-}1\ \textbf{then}\ \ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.$
$\qquad\qquad s{:=}\ s{+}i^2.\ t{:=}\ t{+}i.\ i{:=}\ 0$
$\qquad \textbf{else}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1.\ i{:=}\ i{-}1.\ t{:=}\ t{+}1.\ t'{=}\infty\ \textbf{fi fi}$

$=\ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ ok$
$\quad \textbf{else if}\ 1{\le}i\ \textbf{then}\ s{:=}\ s + 2{\times}i - 1 + (i{-}1)^2.\ t{:=}\ t{+}1{+}i{-}1.\ i{:=}\ 0$

**else** $t'=\infty$ **fi fi**

$=$ **if** $i=0$ **then** $s{:=}\ s+i^2.\ \ t{:=}\ t+i.\ \ i{:=}\ 0$
**else if** $1\le i$ **then** $s{:=}\ s+i^2.\ \ t{:=}\ t+i.\ \ i{:=}\ 0$
**else** $t'=\infty$ **fi fi**

$=$ $sqr_\infty$

(d) $fac$ $=$ **if** $i=0$ **then** $f{:=}\ 1$ **else** $i{:=}\ i-1.\ \ fac.\ \ i{:=}\ i+1.\ \ f{:=}\ f\times i$ **fi**

§ Adding time,

$fac$ $=$ **if** $i=0$ **then** $f{:=}\ 1$ **else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ fac.\ \ i{:=}\ i+1.\ \ f{:=}\ f\times i$ **fi**

Recursive construction starting with $t'\ge t$ produces

$fac_n$ $=$ **if** $0\le i<n$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'\ge t+n$ **fi**

where $i!$ is "$i$ factorial". Replacing $n$ with $\infty$ produces

$fac_\infty$ $=$ **if** $0\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi**

Now we see if $fac_\infty$ is a fixed-point. Starting with the right side of the $fac$ equation,

**if** $i=0$ **then** $f{:=}\ 1$ **else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ fac.\ \ i{:=}\ i+1.\ \ f{:=}\ f\times i$ **fi** replace $fac$ with $fac_\infty$

$=$ **if** $i=0$ **then** $f{:=}\ 1$ expand assignment
**else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.$ **if** $0\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi**. $i{:=}\ i+1.\ \ f{:=}\ f\times i$ **fi**
combine and expand the final two assignments

$=$ **if** $i=0$ **then** $f'=1\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t$ use **if**-context in **then**-part
**else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.$ **if** $0\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi**.
$i'=i+1\ \wedge f'=f\times(i+1)\ \wedge\ t'=t$ **fi** distribute this line into **then** and **else** parts

$=$ **if** $i=0$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$
**else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.$ **if** $0\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i.\ \ i'=i+1\ \wedge f'=f\times(i+1)\ \wedge\ t'=t$
**else** $t'=\infty.\ \ i'=i+1\ \wedge f'=f\times(i+1)\ \wedge\ t'=t$ **fi fi** dep't comp.

$=$ **if** $i=0$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$
**else** $i{:=}\ i-1.\ \ t{:=}\ t+1.$ **if** $0\le i$ **then** $f'=(i+1)!\ \wedge\ i'=i+1\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi fi**
substitution law twice

$=$ **if** $i=0$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$
**else if** $1\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi fi** combine $i=0$ and $1\le i$ cases

$=$ **if** $0\le i$ **then** $f'=i!\ \wedge\ i'=i\ \wedge\ t'=t+i$ **else** $t'=\infty$ **fi**

Therefore $fac_\infty$ is a fixed-point.

(e) $chs$ $=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$ **else** $a{:=}\ a-1.\ \ chs.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$ **fi**

§ $chs_0$ $=$ $t'\ge t$

$chs_1$ $=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$ **else** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ chs_0.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$ **fi**

At this point we need to know that $c\times a/(a-b){:}\ int$ and we don't.
But this whole procedure just generates a candidate that needs to be tested.
So we carry on as if $c\times a/(a-b){:}\ int$

$=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$ **else** $t'\ge t+1$ **fi**

$chs_2$ $=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$ **else** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ chs_1.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$ **fi**

$=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$
**else** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$ **else** $t'\ge t+1$ **fi**.
$a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$ **fi**

$=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$
**else if** $a-1=b$ **then** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ 1.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$
**else** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ t'\ge t+1.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$ **fi fi**

$=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$
**else if** $a-1=b$ **then** $t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ a$
**else** $t'\ge t+2$ **fi fi**

$chs_3$ $=$ **if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$
**else** $a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.$
**if** $a=b$ **then** $c{:=}\ 1$

$\qquad\qquad\textbf{else if } a{-}1=b \textbf{ then } t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ a$

$\qquad\qquad\qquad\textbf{else } t' \ge t+2 \textbf{ fi fi}.$

$\qquad\qquad a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else if } a{-}1=b \textbf{ then } a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ 1.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$

$\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}2=b \textbf{ then } a{:=}\ a-1.\ t{:=}\ t+1.\ t{:=}\ t+1.\ c{:=}\ a.\ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b)$

$\qquad\qquad\qquad \textbf{else } a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ t' \ge t+2.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi fi fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else if } a{-}1=b \textbf{ then } t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ a$

$\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}2=b \textbf{ then } t{:=}\ t+2.\ \ c{:=}\ a\times(a-1)/2$

$\qquad\qquad\qquad \textbf{else } t' \ge t+3 \textbf{ fi fi fi}$

$chs_4 = \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else} \quad a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.$

$\qquad\qquad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}1=b \textbf{ then } t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ a$

$\qquad\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}2=b \textbf{ then } t{:=}\ t+2.\ \ c{:=}\ a\times(a-1)/2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{else } t' \ge t+3 \textbf{ fi fi fi}.$

$\qquad\qquad a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else if } a{-}1=b \textbf{ then } t{:=}\ t+1.\ \ c{:=}\ a$

$\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}2=b \textbf{ then } t{:=}\ t+2.\ \ c{:=}\ a\times(a-1)/2$

$\qquad\qquad\qquad \textbf{else if } a{-}3=b \textbf{ then } t{:=}\ t+3.\ \ c{:=}\ a\times(a-1)\times(a-2)/(2\times 3)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{else } t' \ge t+4 \textbf{ fi fi fi fi}$

$chs_n = \quad \textbf{if } b \le a < b+n \textbf{ then } t{:=}\ t+a-b.\ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1]) \textbf{ else } t' \ge t+n \textbf{ fi}$

$chs_\infty = \quad \textbf{if } a{\ge}b \textbf{ then } t{:=}\ t+a-b.\ \ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1] \textbf{ else } t'{=}\infty \textbf{ fi}$

Now I test to see if $chs_\infty$ is a fixed-point.

$\quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1 \textbf{ else } a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ chs_\infty.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else} \quad a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.$

$\qquad\qquad \textbf{if } a{\ge}b \textbf{ then } t{:=}\ t+a-b.\ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1] \textbf{ else } t'{=}\infty \textbf{ fi}.$

$\qquad\qquad a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else if } a{-}1{\ge}b \textbf{ then} \quad a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.$

$\qquad\qquad\qquad\qquad t{:=}\ t+a-b.\ \ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1].$

$\qquad\qquad\qquad\qquad a{:=}\ a+1.\ c{:=}\ c\times a/(a-b)$

$\qquad\quad \textbf{else } a{:=}\ a-1.\ \ t{:=}\ t+1.\ \ t'{=}\infty.\ \ a{:=}\ a+1.\ \ c{:=}\ c\times a/(a-b) \textbf{ fi fi}$

$= \quad \textbf{if } a=b \textbf{ then } c{:=}\ 1$

$\qquad \textbf{else if } a{>}b \textbf{ then } t{:=}\ t+a-b.\ \ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1]$

$\qquad\quad \textbf{else } t'{=}\infty \textbf{ fi fi}$

$= \quad \textbf{if } a{\ge}b \textbf{ then } t{:=}\ t+a-b.\ \ c{:=}\ \Pi[b+1;..a+1]/\Pi[1;..a-b+1] \textbf{ else } t'{=}\infty \textbf{ fi}$

$= \quad chs_\infty$

So $chs_\infty$ is a fixed-point. Note that for $1{\le}b{\le}a$, $c'$ is the number of ways of choosing $b$ things from $a$ things.

(f) $\qquad foo \quad = \quad \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i{:=}\ 3 \textbf{ else } foo \textbf{ fi}$

§ $\quad foo_0 \ = \ \top$

$\qquad foo_1 \ = \ \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i{:=}\ 3 \textbf{ else } t{:=}\ t+1.\ \ \top \textbf{ fi}$

$\qquad\qquad = \ \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i'{=}3 \wedge t'{=}t \textbf{ else } \top \textbf{ fi}$

$\qquad\qquad = \ i{=}0 \Rightarrow i'{=}3 \wedge t'{=}t$

$\qquad foo_2 \ = \ \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i{:=}\ 3 \textbf{ else } t{:=}\ t+1.\ \ i{=}0 \Rightarrow i'{=}3 \wedge t'{=}t \textbf{ fi}$

$\qquad\qquad = \ \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i'{=}3 \wedge t'{=}t \textbf{ else } i{=}0 \Rightarrow i'{=}3 \wedge t'{=}t+1 \textbf{ fi}$ context

$\qquad\qquad = \ \textbf{if } i{=}0 \textbf{ then } i'{=}3 \wedge t'{=}t \textbf{ else } \top \textbf{ fi}$

$= \quad i{=}0 \Rightarrow i'{=}3 \wedge t'{=}t$

$= \quad foo_1$

The weakest fixed-point (solution) $i{=}0 \Rightarrow i'{=}3 \wedge t'{=}t$ has been found.

(g) $\quad bar \quad = \quad i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i{:=}\ 3\ \textbf{else}\ bar.\ \ i{:=}\ 3\ \textbf{fi}$

§ $\quad bar_0 \ = \ \top$

$bar_1 \ = \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i{:=}\ 3\ \textbf{else}\ t{:=}\ t{+}1.\ \ \top.\ \ i{:=}\ 3\ \textbf{fi}$

$= \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ t{:=}\ t{+}1.\ \ \top.\ \ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{fi}$

$= \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ t{:=}\ t{+}1.\ \ (\exists i'', t''\cdot\ \top \wedge i'{=}3 \wedge t'{=}t'')\ \textbf{fi}$

$= \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ t{:=}\ t{+}1.\ \ i'{=}3\ \textbf{fi}$

$= \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ i'{=}3\ \textbf{fi}$

$= \ \textbf{if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ i'{=}3\ \textbf{fi}$

$= \ i'{=}3 \wedge \textbf{if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ t'{=}t\ \textbf{else}\ \top\ \textbf{fi}$

$= \ i'{=}3 \wedge (i{=}1 \Rightarrow t'{=}t)$

$bar_2 \ = \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i{:=}\ 3\ \textbf{else}\ t{:=}\ t{+}1.\ \ i'{=}3 \wedge (i{=}1 \Rightarrow t'{=}t).\ \ i{:=}\ 3\ \textbf{fi}$

$= \ i{:=}\ i{-}1.\ \ \textbf{if}\ i{=}0\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ i'{=}3 \wedge (i{=}1 \Rightarrow t'{=}t{+}1)\ \textbf{fi}$

$= \ \textbf{if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ i'{=}3 \wedge t'{=}t\ \textbf{else}\ i'{=}3 \wedge (i{=}2 \Rightarrow t'{=}t{+}1)\ \textbf{fi}$

$= \ i'{=}3 \wedge \textbf{if}\ i{=}1\ \textbf{then}\ t'{=}t\ \textbf{else}\ i{=}2 \Rightarrow t'{=}t{+}1\ \textbf{fi}$

$= \ i'{=}3 \wedge (0{<}i{\le}2 \Rightarrow t'{=}t{+}i{-}1)$

Now I guess

$bar_n \ = \ i'{=}3 \wedge (0{<}i{\le}n \Rightarrow t'{=}t{+}i{-}1)$

Replacing $n$ with $\infty$ produces

$bar_\infty \ = \ i'{=}3 \wedge (0{<}i \Rightarrow t'{=}t{+}i{-}1)$